APROBADO
Por Bernardo Cascales fecha 8:34 , 20/12/2011

Análisis Complejo: 2.3 Familias normales. Teorema de Riemann

29/11/2006

Objetivos

1. Estudiar la topología τ_K de convergencia uniforme sobre compactos en $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$: metrizabilidad, completitud, caracterización de subconjuntos compactos (Ascoli).
2. Utilizar las nociones anteriores en $\mathscr{H}(\Omega)$: recordar el teorema de Weierstrass; demostrar los teoremas de Montel y de Vitali.
3. Enunciar y demostrar el teorema de representación conforme de Riemann.
4. Establecer distintas caracterizaciones de los abiertos simplemente conexos de $\mathbb{C}$.
5. Estudiar integrales dependientes de un parámetro: fórmulas integrales para las funciones Γ y ζ.

Ω es un abierto del plano complejo y (E,d) un espacio métrico.

1. E^Ω es el conjunto de las funciones $f:\Omega\to E$ y $C(\Omega,E)$ es el subconjunto formado por las funciones continuas.
2. τ_K es la topología en E^Ω para la que las sucesiones convergentes son las que convergen uniformemente sobre compactos de Ω.
3. Base entornos para τ_K en $f\in E^\Omega$:

$$\mathscr{B}_f=\{V(f,K,\varepsilon): K\subset\Omega \text{ compacto},\ \varepsilon>0\}$$

$$V(f,K,\varepsilon)=\{g\in E^\Omega: d_K(f,g)<\varepsilon\};\ \ d_K(f,g)=\sup\{d(f(z),g(z)):z\in K\}$$

Hacemos notar que las familias $(\mathscr{B}_f)_{f\in E^\Omega}$ satisfacen las propiedades que siguen:

(a) $f\in\mathcal{U}$ para cada $\mathcal{U}\in\mathscr{B}_f$,

(b) si $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathscr{B}_f$, existe $\mathcal{W}\in\mathscr{B}_f$: $\mathcal{W}\subset\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$;

(c) Si $U \in \mathcal{B}_f$ y $g \in U$, entonces existe $V \in \mathcal{B}_g$ t.q. $V \subset U$.

Las dos primeras propiedades (a) y (b) se resumen diciendo que cada $\mathcal{B}_f$ es una BASE DE FILTRO. Las propiedades (a), (b) y (c) juntas permiten demostrar que si decimos que:

Un conjunto de funciones $G \subset E^{\Omega}$ es abierto para la topología τ_K cuando para cada $f \in G$ existe $V \in \mathscr{B}_f$ tal que $V \subset G$.

entonces la familia de tales G, es ciertamente una topología que se denota por τ_K y se llama TOPOLOGÍA DE CONVERGENCIA UNIFORME SOBRE COMPACTOS en E^{Ω}.

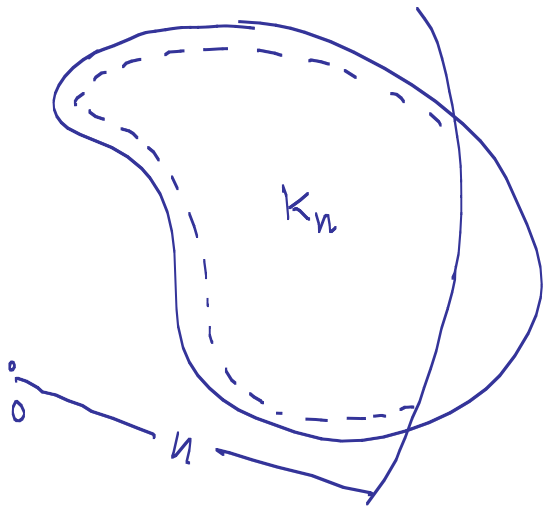
Es fácil comprobar que:

Las sucesiones $f_n \in E^{\Omega}$ que son convergentes para τ_K son precisamente las que convergen uniformemente sobre compactos.

Para cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ existe una sucesión fundamental de compactos, es decir, una sucesión de compactos $K_n \subset \Omega$, que verifica

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n, \quad \text{y} \quad K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Cada compacto $K \subset \Omega$ está contenido en algún K_m.



Basta tomar:

$$K_n := \{z \in \mathbb{C} : d(z, \Omega^c) \geq 1/n, \ |z| \leq n\}.$$

Utilizando que:

$$d(z, \Omega^c) = 0 \quad \text{sii} \quad z \in \Omega^c$$

se concluye que $K_n \subset \Omega$. Además $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ y cada K_n es cerrado y acotado.

Teorema

Sea (K_n) una sucesión fundamental de compactos en el abierto Ω. Para $f, g \in E^\Omega$ se define

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(f,g), \quad \text{con} \quad \rho_n(f,g) = \min\{1, d_{K_n}(f.,g)\}.$$

Entonces ρ es una distancia en E^Ω cuya topología asociada es τ_K.

Demostración.- ρ es una métrica: obsérvese que en principio es una seudo-métrica, pero $\rho(f,g)=0 \rightsquigarrow \rho_n(f,g)=0$ para cada $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow$ $f|_{K_n} = g|_{K_n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow f=g$.

Vamos a ver que si consideramos las bolas asociadas a ρ, $\{B(f,\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ entonces obtenemos una τ_K-base de entornos para f. Para esto veremos que cada $B(f,\varepsilon)$ es un τ_K-entorno de f y que todo τ_K-entorno de f contiene una bola como esta:

(a) $B(f,r)$ es τ_K-entorno para cada $r>0$:

$$\rho(f,g) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\rho_m(f,g) + \sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^m} = \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2^m}\rho_m(f,g) + \frac{1}{2^n} \leq$$

$$\leq \rho_n(f,g)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} \leq d_{K_n}(f,g) + \frac{1}{2^n}$$

Si tomamos n tal que $r/2 > 1/2^n$ entonces:

$$d_{K_n}(f,g) < r/2 \rightsquigarrow d(f,g) < r$$

en otras palabras: $V(f, K_n, r/2) \subset B(f,r)$.

(b) Cada $V(f, K_n, \varepsilon)$ contiene una bola $B(f,r)$

No es restrictivo suponer que $\varepsilon < 1$. Siendo así, tenemos que $B(f, \varepsilon/2^n) \subset V(f, K_n, \varepsilon)$.

Efectivamente:

$$g \in B(f, \varepsilon/2^n) \iff d(f,g) < \varepsilon/2^n \iff$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \rho_m(f,g) < \varepsilon/2^n \implies \frac{1}{2^n} \rho_n(f,g) < \varepsilon/2^n \implies$$

$$\rho_n(f,g) = \min\{1, d_{K_n}(f,g)\} < \varepsilon < 1 \implies d_{K_n}(f,g) < \varepsilon \implies$$

$$\implies g \in V(f, K_n, \varepsilon).$$

Observese que dado que $(K_n)_n$ es una sucesión fundamental de compactos se tiene que $\{V(f,K_n,\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ $\varepsilon>0$ es base de τ_K-entornos para f y así lo que hemos probado es que la topología τ_K y la asociada a ρ coinciden #

Proposición

En las condiciones del teorema anterior si el espacio métrico (E,d) es completo, el espacio métrico (E^Ω, ρ) también lo es.

Demostración.- $(f_n)_n \subset E^\Omega$, ρ-Cauchy, significa que dado $1>\varepsilon>0$, si $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\rho(f,g) < \varepsilon/2^n \rightsquigarrow d_{K_n}(f,g) < \varepsilon$$

$\rightsquigarrow (f_n)_n$ cauchy $\implies$ Para cada $\boxed{K \subset \Omega \text{ compacto } \forall \varepsilon>0,}$

$\exists n_\varepsilon : m \geq n \geq n_\varepsilon \rightsquigarrow d_K(f_n, f_m) < \varepsilon.$

$\rightsquigarrow \boxed{\exists n_\varepsilon :} \; m,n \geq n_\varepsilon \rightsquigarrow d(f_n(z), f_m(z)) < \varepsilon$ [*]

En particular como (E,d) es completo, existe $f(z) = \lim_m f_m(z) \in E$

Tomando límites en la desigualdad [*] cuando $m \to +\infty$ se tiene que

$$\boxed{n \geq n_\varepsilon \rightsquigarrow d(f_n(z), f(z)) \leq \varepsilon}$$

Leyendo ahora lo que está enmarcado $\boxed{}$ se concluye que $f_n \xrightarrow{\tau_K} f$ o lo que es lo mismo $\rho(f_n, f) \to 0$ #

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y (E,d) un espacio métrico. Entonces, $C(\Omega,E)$ es un subconjunto cerrado de (E^Ω, τ_K). Si (E,d) es completo el espacio métrico $(C(\Omega,E),\rho)$ también es completo.

Demostración.- $(f_n)_n \subset C(\Omega,E)$ y $f \in E^\Omega$ con $\rho(f_n,f) \to 0 \Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{\tau_K} f$ i.e. $(f_n)_n$ converge hacia f uniformemente sobre compactos. En particular para cada $a \in \Omega$ si $r>0$ es tal que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, entonces $f_n|_{\overline{D(a,r)}} \longrightarrow f|_{\overline{D(a,r)}}$ uniformemente $\Rightarrow$ $f|_{\overline{D(a,r)}}$ es continua $\xrightarrow{\forall a}$ f es continua.

La segunda parte es consecuencia de la primera y del hecho de que $C(\Omega,E)$ siendo cerrado en el métrico completo $(E^\Omega,\rho) \Rightarrow$ $(C(\Omega,E),\rho)$ es también métrico completo. #

Definición

Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega,E)$ se dice que es equicontinua en $a \in \Omega$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que

$$[z \in D(a,r), f \in \mathscr{F}] \Rightarrow d(f(z),f(a)) < \varepsilon$$

Se dice que $\mathscr{F}$ es equicontinua cuando es equicontinua en cada punto $a \in \Omega$.

Ejemplo.- ✓ Si $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es una familia para la que $|f(z)-f(w)| \leq M|z-w|$ $z,w \in \Omega$ entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua.

✓ Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es una familia para la que $\{ \|f'\|_K : f \in \mathcal{F}\}$ está acotada para cada $K \subset \Omega$ compacto $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ es equicontinua. #

τ_p la topología de la convergencia puntual (la topología producto) en E^Ω, donde una base de entornos de $f \in E^\Omega$ es la formada por los conjuntos $V(f, H, \varepsilon)$ con $H \subset \Omega$ finito y $\varepsilon > 0$.

Dado que los subconjuntos finitos son compactos, tenemos

τ_p es más gruesa que τ_K.

En otras palabras toda sucesion $(f_n)_n$ en E^Ω que converge à cierta f para τ_K, también converge hacia f para τ_p.

Si $\mathscr{F} \subset E^\Omega$, denotaremos por $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^Ω para la topología τ_p (resp. τ_K).

Tenemos las siguientes propiedades

2. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$.
3. Si $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset C(\Omega, E)$.

En general para $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ no es verdad que $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} \subset C(\Omega, E)$ (es facil dar un ejemplo de una sucesión puntualmente convergente de funciones continuas cuyo límite no es continuo). Sin embargo tenemos:

Lema

Si la familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, su clausura $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ también lo es y por lo tanto $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} \subset C(\Omega, E)$.

Demostración.- Dado $\varepsilon > 0$, existe $D(a, r) \subset \Omega$ t.q.

$$d(f(z), f(a)) < \varepsilon \qquad \forall z \in D(a, r) \quad \forall f \in \mathscr{F}$$
$$\Downarrow$$
$$d(f(z), f(a)) \leq \varepsilon \qquad \forall z \in D(a, r) \quad \forall f \in \overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$$

Y la última línea, significa que $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ es equicontinuo $\leadsto$ $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} \subset C(\Omega, E)$ #

Proposición

Si la familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} = \overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$.

Demostración.- Claramente $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$. Recíprocamente, sea $g \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ y fijemos $K \subset \Omega$ compacto. Dado $\varepsilon > 0$, para $a \in K$ sea $D(a, r_a) \subset \Omega$ t.q.

$$d(f(z), f(a)) < \varepsilon/3 \quad \forall z \in D(a, r_a) \quad \forall f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$$

Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ t.q. $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i, r_{a_i})$ y tomemos $h \in \mathcal{F}$ tal que

$$d(g(a_i), h(a_i)) < \varepsilon/3 \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si $z \in K \rightsquigarrow z \in D(a_j, r_{a_j})$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y así,

$$d(g(z), h(z)) \leq d(g(z), g(a_j)) + d(g(a_j), h(a_j)) + d(h(a_j), h(z)) < \varepsilon$$

$$\rightsquigarrow \underset{h \in \mathcal{F}}{d_K(g, h) < \varepsilon} \rightsquigarrow g \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \quad \#$$

Corolario

En una familia equicontinua $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ coinciden las topologías inducidas por τ_p y τ_K.

Demostración.- Es suficiente probar que en $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ coinciden τ_p y τ_K: ahora bien para esto es suficiente ver que para cada $A \subset \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ se tiene

$(*)$ $\overline{A}^{\tau_K} \subset \overline{A}^{\tau_p} \rightsquigarrow \mathrm{id}: (\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}, \tau_K) \xrightarrow[\text{continua}]{} (\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}, \tau_p)$

$(**)$ $\overline{A}^{\tau_p} \subset \overline{A}^{\tau_K} \rightsquigarrow \mathrm{id}: (\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}, \tau_p) \xrightarrow[\text{continua}]{} (\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}, \tau_K)$

Notar que $(*)$ y $(**)$ se cumplen porque $\overline{A}^{\tau_p} = \overline{A}^{\tau_p}$ para cada equicontinuo A. #

Lema

Sea $S \subset \Omega$ un conjunto denso y $(f_n)_n \subset C(\Omega, E)$ una sucesión equicontinua puntualmente convergente sobre S. Si para cada $z \in \Omega$ existe un compacto $K_z \subset E$ que contiene a la sucesión $(f_n(z))_n$, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia una cierta función $f \in C(\Omega, E)$.

Demostración.- Gracias a la proposición anterior es suficiente demostrar que si $(f_n)_n$ converge hacia f en S entonces $f_n \xrightarrow{\tau_p} f$.

Dado $a \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$, existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que:

$$z \in D(a,r) \implies d(f_n(z), f_n(a)) < \varepsilon/3 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $S \subset \Omega$ es denso $\rightsquigarrow$ $\exists$ $s \in D(a,r) \cap S$ y por hipótesis $\rightsquigarrow$ $(f_n(s))_n$ converge en (E,d); así existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq n_\varepsilon \rightsquigarrow d(f_n(s), f_m(s)) < \varepsilon/3.$$

Por lo tanto, si $z \in D(a,r)$ se tiene que:

$$d(f_n(z), f_m(z)) \leq d(f_n(z), f_n(s)) + d(f_n(s), f_m(s)) + d(f_m(s), f_m(z)) <$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geq n_\varepsilon.$$

Por lo tanto, para cada $z \in \Omega$ $(f_n(z))_n$ es Cauchy y $(f_n(z))_n \subset K_z$ compacto $\rightsquigarrow$ $\exists \lim_n f_n(z) \in (E,d)$. y así acaba la prueba. #

NOTA.- Observar que la hipótesis $(f_n(z))_n \subset K_z$ compacto, puede cambiarse por K_z siendo completo para la métrica inducida por d: en particular esto se cumple si (E,d) es métrico completo.

Teorema de Ascoli

Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es τ_K-relativamente compacta si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes

i) $\mathscr{F}$ es una familia equicontinua.

ii) Para cada $z \in \Omega$ el conjunto $\mathscr{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathscr{F}\}$ es relativamente compacto en el espacio métrico (E, d).

Demostración.-

$\Longrightarrow$ $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ es τ_K-compacta. Probaremos que para $\mathcal{G}$ se satisfacen i) y ii). Dado $\varepsilon > 0$, and $K \subset D(a,r) \subset \Omega$ fijados,

$$\mathcal{G} \subset \bigcup_{f \in \mathcal{G}} V(f, K, \varepsilon)$$

$\underset{\text{compacidad}}{\overset{\text{por}}{\rightsquigarrow}}$ $\exists f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G} \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(f_i, K, \varepsilon)$.

Si tomamos ahora $\delta < r$ tal que

$z \in D(a, \delta) \rightsquigarrow d(f_i(z), f_i(a)) < \varepsilon \quad i = 1, 2, \ldots, n$

entonces podemos concluir que

$\forall z \in D(a, \delta), \forall f \in \mathcal{G} \rightsquigarrow d(f(z), f(a)) < 3\varepsilon$

Esto prueba que $\mathcal{G}$ es equicontinua.

Por otro lado se tiene que: $(C(\Omega, E), \tau_K) \xrightarrow{\delta_z} (E, d)$

$z \in \Omega$ fijo $\quad f \longmapsto f(z)$

es continua $\rightsquigarrow$ δ_z lleva compactos a compactos $\rightsquigarrow$ $\delta_z(\mathcal{G}) \subset (E, d)$ es compacto.

$\delta_z(\mathcal{G}) = \{f(z) : f \in \mathcal{G}\}$

$\Longleftarrow$ Supongamos ahora que $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ satisface las propiedades i) y ii): hemos de probar que si $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$, entonces cierta subsucesión $(f_{n_k})_k$ converge hacia alguna $f \in C(\Omega, E)$ en la topología τ_K. Tomemos $S \subset \Omega$ un subconjunto denso y numerable que enumeramos como

$$S = z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Vamos a encontrar $(f_{n_k})_k$ por un procedimiento diagonal.

$f_1(z_1), f_2(z_1), \dots, f_n(z_1) \xrightarrow[\text{subsucesión}]{\exists} f_{n_1^1}(z_1), f_{n_2^1}(z_1), \dots, f_{n_k^1}(z_1), \dots \longrightarrow$ algún $\in E$

$f_{n_1^1}(z_2), \dots, f_{n_k^1}(z_2), \dots \xrightarrow[\text{subsucesión}]{\exists} f_{n_1^2}(z_2), f_{n_2^2}(z_2), \dots, f_{n_k^2}(z_2), \dots \longrightarrow$ " "

$\vdots$

Procedemos por recurrencia, y tomando la diagonal se tiene una subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ con la propiedad de que para cada $z_i \in S$ existe

$$\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(z_i) \in E$$

Así, utilizando ahora las condiciones (i) y (ii) y el lema previo al teorema de Ascoli se concluye que $f_{n_k} \xrightarrow{\tau_K} f$ para alguna $f \in C(\Omega, E)$ y así acaba la demostración. #

Familias normales

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. $\mathscr{H}(\Omega)$ es cerrado en $(C(\Omega), \tau_K)$ y la derivación $D: (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K) \to (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$ dada por $D(f) := f'$ es una aplicación lineal y continua.

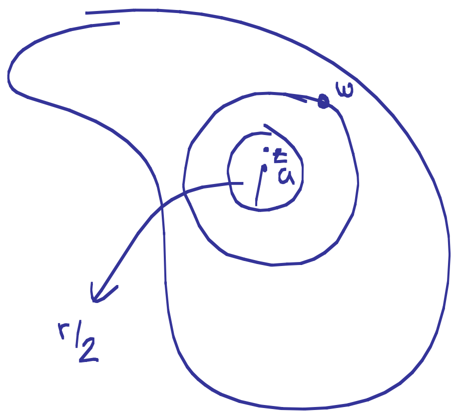
FINAL

Demostración.- El teorema de Weierstrass asegura que si $(f_n)_n \xrightarrow{\tau_K} f \in C(\Omega)$ entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f_n' \xrightarrow{\tau_K} f'$. Recordemos la prueba:

$\boxed{f \in \mathcal{H}(\Omega)}$ Como f es continua, para ver que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es suficiente demostrar que para cada $R \subset \Omega$ rectángulo se tiene que $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$. Ahora bien, como $f_n \xrightarrow{\tau_K} f$, tenemos para las integrales

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \lim_n \int_{\partial R} f_n(z)\,dz = \lim_n 0 = 0.$$

$\boxed{f_n' \xrightarrow{\tau_K} f'}$ Para esto acotamos la diferencia $f_n'-f'$ uniformemente en discos. Tomamos $D(a,r)\subset\Omega$ y acotamos $|f_n'-f'|$ uniformemente en $D(a,r/2)$: para $z\in D(a,r/2)$ tenemos



$$f_n'(z)-f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

donde $\gamma(\theta)=a+re^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$.

Tomando valores absolutos, se tiene:

$$|f_n'(z)-f'(z)| \le \frac{1}{\cancel{2\pi}}\,\frac{\sup\{|f_n(w)-f(w)| : |w-a|\le r\}\,\cancel{2\pi}\, r}{(r/2)^2}$$

$$= \frac{4}{r}\sup\{|f_n(w)-f(w)| : |w-a|\le r\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\rightsquigarrow \sup_{|z-a|\le r/2} |f_n'(z)-f'(z)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, y así $f_n' \xrightarrow{\tau_K} f'$ #

Definición

Una familia $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$ se dice que es normal cuando de cada sucesión $(f_n)_n$ en $\mathscr{F}$ se puede extraer una subsucesión que τ_K-convergente hacia alguna $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ (i.e. $\mathscr{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $(\mathscr{H}(\Omega),\tau_K)$).

FINAL

Si $K\subset\Omega$ es compacto y $f\in C(\Omega)$ escribimos $\| f \|_K := \sup_{z\in K}|f(z)|$.

Definición

Una familia $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(\Omega)$ se dice que es acotada cuando para cada compacto $K\subset\Omega$ se cumple $\sup\{\| f \|_K : f\in\mathscr{F}\} < +\infty$.

FINAL

La siguiente proposición es fácil de demostrar y los detalles de demostración de la misma se dejan al cuidado del alumno.

Proposición

Para una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ son equivalentes:

a) $\mathscr{F}$ es acotada.

b) Para cada τ_K-entorno de 0, $V \subset \mathscr{H}(\Omega)$ existe $t > 0$ tal que $\mathscr{F} \subset tV$.

c) Para cada $a \in \Omega$ existe $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ con $\sup_{f \in \mathscr{F}} \|f\|_{\overline{D(a,r)}} < +\infty$.

Dem.- a) $\Longleftrightarrow$ b) se sigue inmediatamente de la definición. La equivalencia (a) $\Longleftrightarrow$ c) se sigue del hecho de que cada disco $\overline{D(a,r)}$ es compacto y de que cada compacto $K \subset \Omega$, puede ser cubierto con un número finito de discos como los de antes. #

Teorema de Montel

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es normal si y sólo si es acotada. Así, $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es τ_K-compacta si y sólo si es τ_K-cerrada y acotada.

FINAL

Demostración.-

$\Longrightarrow$ Supongamos que $\mathscr{F}$ es normal $\Longrightarrow$ $\mathscr{G} = \overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$ es τ_K-compacta.

$\curvearrowright$ si $K \subset \Omega$ compacto $\exists\, f_1, f_2, \dots, f_i \in \mathscr{G}$ t.q.

$$\mathscr{G} \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(f_i, K, 1) \curvearrowright$$

Si $f \in \mathscr{G} \curvearrowright f \in V(f_i, K, 1)$ para algún f_i. Así,

$$\|f\|_K = \|(f - f_i) + f_i\|_K \leq \|f - f_i\|_K + \|f_i\|_K < 1 + \|f_i\|_K$$

$$\sup_{f \in \mathscr{G}} \|f\|_K \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \{1 + \|f_i\|_K\} = M < +\infty$$

$\Longleftarrow$ Supongamos $\mathscr{F}$ es acotada: dada $a \in \Omega$ sea $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y tomemos $z \in \overline{D(a, r/2)} \subset \overline{D(a,r)}$. La fórmula de Cauchy nos permite escribir para $f \in \mathscr{F}$:

$$f(z) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - a}\, dw =$$

$$= \int_\gamma \frac{(z-a)\, f(w)}{(w-z)(w-a)}\, dw \quad \text{donde} \quad \gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Tomando valores absolutos se tiene que:

$$\underset{|z-a|\le r/2}{|f(z) - f(a)| \le} \frac{1}{\cancel{2\pi}} |z-a| \cancel{2\pi r} \frac{\sup\{|f(w)| : |w-a| \le r\}}{r/2 \cdot \cancel{r}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sup\{|f(w)| : |w-a| \le r\}}{r} |z-a|$$

$$\le \frac{2 \sup\{\|f\|_{\overline{D(a,r)}} : f \in \mathcal{F}\}}{r} |z-a|$$

Esta desigualdad muestra que $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua, y como $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{C}$ es acotada (relat. compacto) en $\mathbb{C}$, podemos aplicar el T^ma^ de ASCOLI para concluir que $\mathcal{F}$ es τ_K-relativamente compacta, como queremos concluir. #

Corolario

No existe una norma en $\mathscr{H}(\Omega)$ cuya topología asociada es τ_K.

Demostración.- Hay que tener en cuenta un teorema de Riesz que afirma que todo espacio normado en el que la bola unidad cerrada es compacta es de dimensión finita. #

La siguiente observación es clave para alguna de las consecuencias que vamos a obtener del teorema de Montel.

Observación

En un espacio métrico compacto (X, d) una sucesión $(x_n)_n$ converge si, y sólo si, $(x_n)_n$ tiene un único punto de aglomeración.

Teorema de Vitali

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $(f_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge puntualmente en un conjunto $M \subset \Omega$ con $M' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos. Su límite $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ queda determinado por la condición $\lim_n f_n(z) = f(z)$ para todo $z \in M$.

FINAL

Demostración.- Como $(f_n)_n$ es acotada, el t^{ma} de Montel asegura que $\mathcal{G} = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset (\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$ es compacto. Así, para ver que $(f_n)_n$ converge es suficiente ver que $(f_n)_n$ tiene un único punto de aglomeración en $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$. Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ dos puntos de aglomeración de $(f_n)_n$: existen subsucesiones

$$\left.\begin{array}{l} f_{n_k} \xrightarrow{\tau_K} f \\ f_{m_\ell} \xrightarrow{\tau_K} g \end{array}\right\} \xrightarrow[z \in M]{\exists \lim f_n(z)} f(z) = g(z) \quad \forall z \in M \xrightarrow{\text{Principio Identidad}}$$

$f = g$ en Ω. Así, hay un único punto de aglomeración y por tanto $(f_n)_n$ converge. #

e^z como un límite

La sucesión $f_n(z) = (1 + z/n)^n$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ hacia e^z.

Demostración.- Observamos que $(f_n)_n$ está acotada y como

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

el teorema de Vitali garantiza $f_n(z) \longrightarrow e^z$ unif. sobre compactos de $\mathbb{C}$.

$$|f_n(z)| \leq \left(1 + |z/n|\right)^n \underset{|z| \leq r}{\leq} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \leq e^r \leadsto (f_n)_n \text{ es } \tau_K\text{-acotada} \quad \#$$

Teorema de Hurwitz

Sea (f_n) una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y sea $\overline{D(a,r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ cuando $|z-a| = r$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ las funciones f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$ (contados repetidos según sus multiplicidades).

FINAL

Demostración.- Observar que si $\varepsilon = \min\{|f(z)| : |z-a|=r\} > 0$

$\rightsquigarrow \exists\, n_\varepsilon :\quad m \geq n_\varepsilon$ entonces

$$\underset{|z-a|=r}{|f_m(z) - f(z)|} < \varepsilon \leq \underset{|z-a|=r}{|f(z)|}$$

$\rightsquigarrow$ f_m y f tienen el mismo nº de ceros en $D(a,r)$ contados según multiplicidades después del T$^{\underline{ma}}$ de Rouché #

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si cada f_n no se anula en Ω entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien f no se anula en Ω.

Demostración.- Supongamos que f no es idénticamente nula. Veamos que f no puede anularse. Si existe $a \in \Omega$ con $f(a)=0 \rightsquigarrow a$ es un cero aislado $\rightsquigarrow$ $\exists\ \overline{D(a,r)} \subset \Omega$ tal que f no se anula en $\overline{D(a,r)} \setminus \{a\} \rightsquigarrow$ f no se anula en $|z-a|=r \underset{\text{Hurwitz}}{\rightsquigarrow} \exists\, n \in \mathbb{N}$: f_n y f tienen en $D(a,r)$ el mismo nº de ceros, lo que es absurdo #

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión de funciones inyectivas de $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es inyectiva, o bien f es constante.

Dem.- Fijar $a \in \Omega$. Considerar $\Omega_a := \Omega \setminus \{a\}$ y $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$.

$g_n \xrightarrow{\tau_a} f - f(a)$ en $\mathscr{H}(\Omega_a) \rightsquigarrow f - f(a)$ no se anula en $\Omega_a \rightsquigarrow f$ iny. #

Proposición

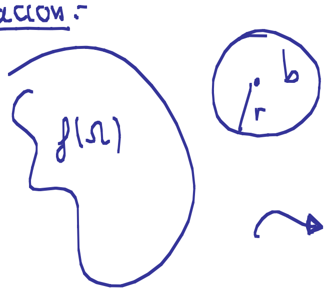
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ verifica

i) Existe $a \in \Omega$ tal que $\{f(a) : f \in \mathscr{F}\}$ es acotado.

ii) $\overline{\cup\{f(\Omega) : f \in \mathscr{F}\}} \neq \mathbb{C}$

entonces $\mathscr{F}$ es una familia normal.

Demostración:-



Sea $D(b,r)$ $r>0$ tal que $f(\Omega) \cap D(b,r) = \emptyset$

$$\left| \frac{1}{f(z)-b} \right| \leq r \text{ para cada } z \in \Omega \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left\{ \frac{1}{f-b} : f \in \mathcal{F} \right\} \text{ es normal.}$$ De aquí

Se sigue, que si $(f_n)_n$ es una sucesión en $\mathcal{F}$ $\rightsquigarrow$ $\exists$ una subsucesión $(f_{n_k})_k$ tal que

$$\frac{1}{f_{n_k}(z)-b} \longrightarrow g(z) \qquad g \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Observar que $\frac{1}{f_{n_k}-b}$ no se anula nunca. y que como $(f_{n_k}(a))$ es acotada $\rightsquigarrow$ $g(a) \neq 0$.

Por lo tanto $g(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$ $\rightsquigarrow$

$$f_{n_k}(z)-b \xrightarrow{\tau_k} \frac{1}{g(z)} \rightsquigarrow f_{n_k} \xrightarrow{\tau_k} b + \frac{1}{g} \text{ y}$$

así queda demostrado que $\mathcal{F}$ es normal. #

Montel-Caratheodory

El resultado de la proposición anterior se sigue verificando cuando la condición ii) se sustituye por la condición más débil:

ii') Existen $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ tales que cada $f \in \mathscr{F}$ omite los valores a y b.

Teorema de Riemann

Objetivos

- Demostrar que si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es abierto simplemente conexo, entonces Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$.
- Notar que $\Omega \neq \mathbb{C}$ es necesario en la equivalencia anterior.
- Caracterizar los abiertos simplemente conexos en $\mathbb{C}$.

Notar que si $\Omega = \mathbb{C}$ el T$^{\underline{ma}}$ de Liouville implica que no puede existir una función holomorfa $f : \mathbb{C} \longrightarrow D(0,1)$ que no sea constante. Sin embargo si es facil constatar que la aplicación

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow D(0,1)$$
$$z \longmapsto \frac{z}{1+|z|}$$

es un homeomorfismo con inversa dada por $f^{-1}(w) = \dfrac{w}{1-|w|}$ si $|w|<1$.

Los lemas que siguen son preparativos para la demostración del T$^{\underline{ma}}$ de Riemann.

Lema

i) Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset D(0,1)$ y $a \in \Omega$. La condición

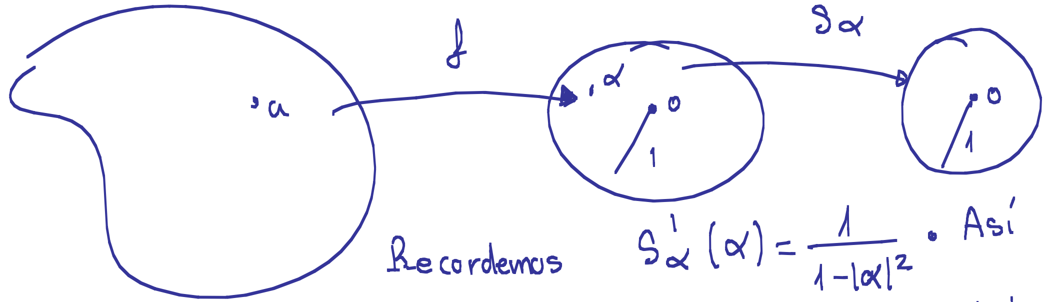
$$0 < |f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

implica que $f(a) = 0$.

ii) Si $f : \Omega \to D(0,1)$ es un isomorfismo conforme y $a = f^{-1}(0)$ se verifica

$$\begin{aligned}
|f'(a)| &= \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g(a) = 0\} \\
&= \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\} \\
&= \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g \text{ inyectiva }\}
\end{aligned}$$

Demostración.- i) Supongamos que i) se da y sea $f(a) = \alpha \in D(0,1)$. Escribimos $S_\alpha(z) := \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z}$. Entonces



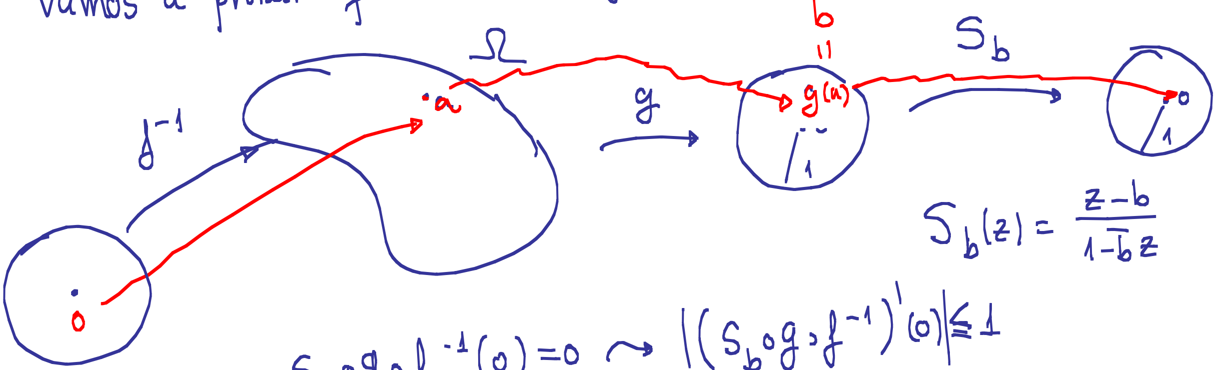
Recordemos $S'_\alpha(\alpha) = \dfrac{1}{1-|\alpha|^2}$. Así

$$|(S_\alpha\circ f)'(a)| = |S'_\alpha(\alpha)\cdot f'(a)| = \frac{1}{1-|\alpha|^2}\,|f'(a)| \underset{\alpha\neq 0}{>} |f'(a)|.$$

ii) $f:\Omega \xrightarrow{\text{iso}} D(0,1)$, $a \rightsquigarrow 0$

$$\underbrace{|f'(a)|}_{(1)} \le \underbrace{\sup\{|g'(a)|: g\in\mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega)\subset D,\ g(a)=0\}}_{(2)} \le \underbrace{\sup\{|g'(a)|: g\in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega)\subset D\}}_{(3)}$$

Vamos a probar que (1)=(3) y así los supremos son máximos:



$$S_b(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$$

$$S_b\circ g\circ f^{-1}(0)=0 \underset{\text{Schwarz}}{\rightsquigarrow} |(S_b\circ g\circ f^{-1})'(0)|\le 1$$

$$\rightsquigarrow \left|S'_b(b)\cdot g'(a)\cdot \frac{1}{f'(a)}\right|\le 1 \rightsquigarrow \frac{1}{1-|b|^2}\,|g'(a)|\le |f'(a)| \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow |g'(a)|\le|f'(a)|.$$

Por otro lado:

$$(1)\le \sup\{|g'(a)|: g\in\mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega)\subset D,\ \text{inyectiva}\}\le (3)$$

Como (1)=(3) se obtiene la igualdad de las tres cantidades.

NOTA: Si en (i) escribimos $0<|f'(a)| = \text{máx}\{|g'(a)|: g\in\mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega)\subset D,\ g \text{ inyectiva}\}$ entonces también se obtiene $f(a)=0$, con la misma prueba.

NOTA 2.- Supongamos que Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$ y que $h:\Omega \longrightarrow D(0,1)$ es una función holomorfa tal que h maximiza la derivada en un punto $a\in\Omega$. Entonces $h(a)=0$ y h es biyección holomorfa.

Dem.- Tomemos $g:\Omega \longmapsto D(0,1)$ biyección holomorfa con $g(a)=0$. Entonces

$$0<|g'(a)|=\max\{|f'(a)|: f\in\mathcal{H}(\Omega),\ f(\Omega)\subset D(0,1)\}=|h'(a)|$$

Se tiene que $h(a)=0$, por el apartado (i), La composición $h\circ g^{-1}(D(0,1))\subset D(0,1)$ con $h\circ g^{-1}(0)=0 \underset{\text{Lema Schwarz}}{\rightsquigarrow} |(h\circ g^{-1})'(0)|\leq 1$

pero además

$$|(h\circ g^{-1})'(0)|=\left|h'(a)\cdot\frac{1}{g'(a)}\right|=1 \rightsquigarrow \text{Lema de Schwarz}$$

existe $|\lambda|=1$ tal que

$$(h\circ g^{-1}(z)=\lambda z \quad \forall z\in D) \rightsquigarrow h(w)=\lambda g(w) \quad \forall w\in\Omega$$

y por lo tanto h isomorfismo. #

Esta observación nos muestra como buscar biyecciones conformes.

Versión preliminar del teorema de Riemann

Todo abierto conexo $\Omega\subsetneq\mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ con $0\notin f(\Omega)$ existe $g\in\mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2=f$, es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$.

FINAL

Demostración.- Consideremos la familia

$$\mathcal{F}=\{f\in\mathcal{H}(\Omega): f(\Omega)\subset D(0,1),\ \text{inyectiva}\}$$

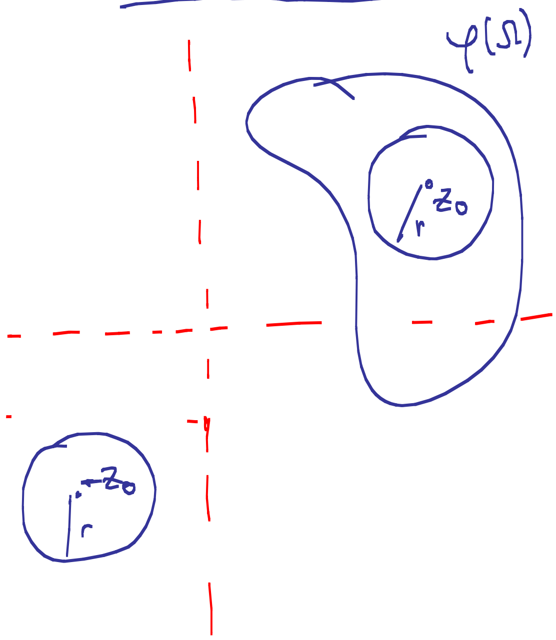
Vamos a hacer la demostración en dos etapas:

1ª ETAPA.- $\mathcal{F}$ es no vacía y para cada $a\in\Omega$, existe $h\in\mathcal{F}$ tal que

$$|h'(a)|=\sup\{|f'(a)|: f\in\mathcal{F}\}$$

2ª ETAPA.- Probaremos que h como antes es sobreyectiva.

Demostración 1ª ETAPA.- Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y consideremos la función $g(z) = z - w$. Es claro que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $0 \notin g(\Omega)$. Así, $\exists\, \varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $(\varphi(z))^2 = g(z) = z - w$ para cada $z \in \Omega$. Tenemos que:



- φ es inyectiva en Ω
- $0 \notin \varphi(\Omega)$

$\varphi(\Omega)$ es abierto y así existe $D(z_0, r) \subset \varphi(\Omega)$

Se tiene que:

✓ $0 \notin D(z_0, r) \rightsquigarrow |z_0| \geq r$

✓ $D(-z_0, r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$. Efectivamente, existiera $u \in \Omega$ con $\varphi(u) \in D(-z_0, r) \rightsquigarrow -\varphi(u) \in D(z_0, r) \rightsquigarrow \exists\, v \in \Omega$ tal que $-\varphi(u) = \varphi(v) \rightsquigarrow \varphi(v)^2 = v - w = \varphi(u)^2 = u - w \rightsquigarrow u = v \rightsquigarrow \varphi(u) = \varphi(v) = -\varphi(u) \rightsquigarrow \varphi(u) = 0 \in \varphi(\Omega)$ absurdo. Así, si consideramos la función

$$f(z) = \frac{r/2}{\varphi(z) + z_0}$$

entonces f es inyectiva y $f(\Omega) \subset D$. Por otra parte como $\mathcal{F}$ es normal $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ es compacto (no vacío). Dado $a \in \Omega$ existe $h \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ tal que

$$0 < |h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}\} \overset{[*]}{\geq} \sup\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\} \quad (✓✓)$$

Si vemos que $h \in \mathcal{F}$, entonces tendremos la igualdad en [*]. Ahora bien como $h \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$, existe $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ t.q. $f_n \xrightarrow{\tau_K} h$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} ✓\ h \text{ es cte} \\ ✓\ h \text{ es inyectiva} \end{cases}$$

Ahora bien $|h'(a)| \geq |f'(a)| > 0 \quad \forall f \in \mathcal{F} \rightsquigarrow h$ es inyectiva $\rightsquigarrow$

h es abierta y como $h(\Omega) \subset \overline{D(0,1)} \rightsquigarrow h(\Omega) \subset D(0,1)$ y así acaba la prueba de la primera parte. Por otro lado obsérvese que las 'igualdades obtenidas en (✓✓)' implican por las observaciones antes del teorema que $h(a)=0$.

<u>Demostración 2^a ETAPA</u>.- Utilizaremos ahora la última parte del Corolario que sigue que ya fue demostrado como consecuencia del Lema de Schwarz.

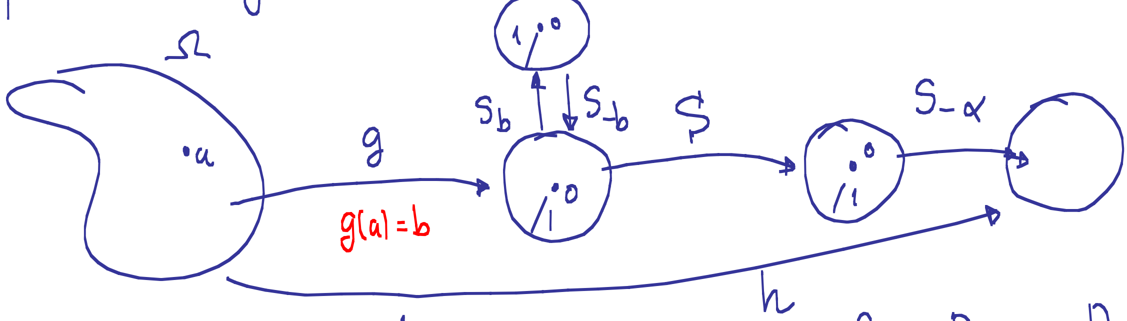
Corolario

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$. Entonces para cada $a \in D(0,1)$ se cumple

$$|f'(a)| \leq \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

y si en algún $a \in D(0,1)$ se cumple la igualdad entonces f es una biyección holomorfa de $D(0,1)$ en si mismo. En particular, si f no es inyectiva se cumple $|f'(0)| < 1$.

Tomemos h construida en la etapa anterior. Supongamos que h no es sobreyectiva y supongamos que $\alpha \in D(0,1) \setminus h(\Omega)$. Si consideramos $S_\alpha \circ h$, $S_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$, $S_\alpha \circ h \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $0 \notin S_\alpha \circ h(\Omega)$. Tomemos $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $(g(z))^2 = S_\alpha \circ h(z)$ $\forall z \in \Omega$. Si $S : D \longrightarrow D$, $z \rightsquigarrow z^2$ tenemos que $S \circ g = S_\alpha \circ h \rightsquigarrow S_{-\alpha} \circ S \circ g = h$.



$h = (S_{-\alpha} \circ h \circ S_{-b}) \circ (S_b \circ g)$ pero $S_{-\alpha} \circ h \circ S_{-b} : D \longrightarrow D$ no es inyectiva $\rightsquigarrow |(S_{-\alpha} \circ h \circ S_b)'(0)| < 1 \rightsquigarrow |h'(a)| = |(S_{-\alpha} \circ h \circ S_{-b})'(0)| \cdot |(S_b \circ g)'(a)| < |(S_b \circ g)'(a)|$ que contradice $|h'(a)|$ maximiza la derivada #

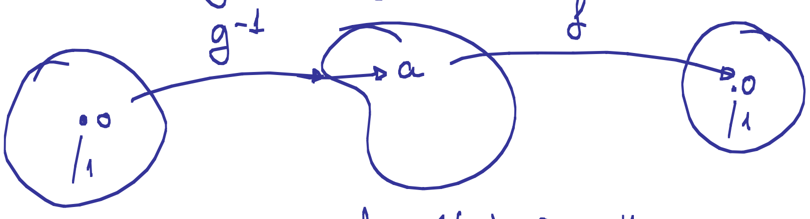
Teorema de Riemann

Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $f : \Omega \to D(0,1)$ que cumple $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.

FINAL

Demostración.- Si Ω es simplemente conexo, satisface las hipótesis de la versión preliminar anterior y por lo tanto existe $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ biyección conforme con $f(a) = 0$. Simplemente observamos ahora que como $f'(a) \neq 0$ tomando $\lambda = \frac{\overline{f'(a)}}{|f'(a)|}$, $|\lambda| = 1$ y $\lambda f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ es una biyección conforme para la que $(\lambda f)'(a) = \frac{\overline{f'(a)}}{|f'(a)|} \cdot f'(a) = |f'(a)| > 0$.

Así, podemos suponer que $\underline{\underline{f}}$ misma es biyección y satisface $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$. Vemos para terminar que estas condiciones determinan $\underline{\underline{f}}$ de forma unívoca: supongamos que $g : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ es otra biyección con $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$. Entonces



$f \circ g^{-1}(D(0,1)) \subset D(0,1)$ $\qquad f \circ g^{-1}(0) = 0$ y

$(f \circ g^{-1})'(0) =: f'(a) \cdot \frac{1}{g'(a)} = f'(a) \frac{1}{g'(a)} = 1 = |(f \circ g^{-1})'(0)|$

$\xrightarrow{\text{Lema de Schwarz}}$ $f \circ g^{-1}(z) = z$ para cada $z \in D(0,1) \leadsto f(w) = g(w)$ para cada $w \in \Omega$. #

El objetivo ahora es demostrar la siguiente caracterización de los abiertos simplemente conexos:

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
5. $f(z)\mathrm{Ind}(\Gamma,z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.
6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.
7. Ω es holomórficamente conexo.
8. Ω es logarítmicamente conexo.
9. Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

FINAL

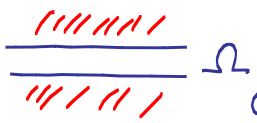
Empezamos por aclarar cada uno de los conceptos involucrados: una vez que hayamos hecho esto, demostraremos la equivalencia entre todas las propiedades:

1.- Ω homeomorfo a $D(0,1)$, quiere decir que existe una función biyectiva $f: \Omega \longmapsto D(0,1)$ continua con inversa f^{-1} continua.

2.- Ω es simplemente conexo, por definición, si cada camino cerrado en Ω es homotópico a una cte: al acabar este recordatorio de propiedades haremos un repaso más exhaustivo de la noción de abierto simplemente conexo.

3.- Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero, significa que cada camino cerrado γ en Ω no da vueltas alrededor de los puntos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

4.- $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, significa que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ no se puede poner como unión de dos cerrados de $\mathbb{C}_\infty$ no triviales y disjuntos: hemos de notar que aquí la hipótesis $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ conexo NO SE PUEDE REEMPLAZAR por $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es conexo:



una banda horizontal es simp. conexo pero $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no es conexo.

5.- Lo que escribimos aquí, es la validez de la fórmula de Cauchy para todas las funciones y ciclos en Ω.

6.- Igual que en el ítem anterior pero con el Teorema de Cauchy.

7.- Ω holomorficamente conexo $:=$ para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g' = f$. en Ω.

8.- Ω logaritmicamente conexo $:=$ para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $e^{g(z)} = f(z)$ para cada $z \in \Omega$.

9.- Esta condición es la que hemos utilizado como condición suficiente en el $T^{\underline{ma}}$ de Riemann. Para obtener que Ω es conf. equivalente a $D(0,1)$ si $\Omega \neq \mathbb{C}$.

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

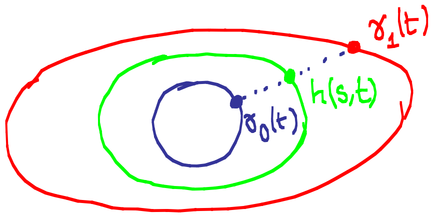
Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

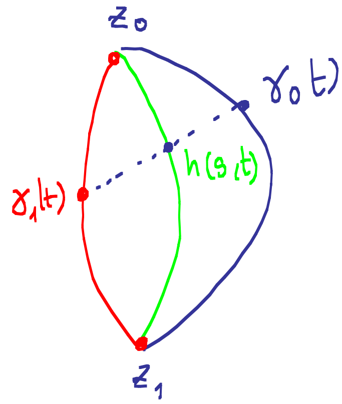
1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:
   - i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   - ii) $h(s,0) = h(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.
2. Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, se dice que son Ω-homotópicos (como caminos con extremos fijos) si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que cumple:
   - i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   - ii) $h(s,0) = z_0$, $h(s,1) = z_1$ para todo $s \in [0,1]$.

En ambos casos se dice que h es una homotopía entre γ_0 y γ_1.

La noción de homotópia significa que podemos deformar continuamente γ_0 en γ_1, a traves de caminos cerrados si γ_0 y γ_1 son cerrados, o a través de caminos con extremos fijos si γ_0 y γ_1 lo tienen.

Suponemos que $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$





$$h(s,t) := (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) \qquad \begin{array}{l} 0 \le s \le 1 \\ 0 \le t \le 1 \end{array}$$

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por

$$\Lambda(\Omega) := \{\gamma : [0,1] \to \Omega : \gamma \text{ camino cerrado}\}.$$

$\Lambda(\Omega)$ lo consideramos dotado de la norma del supremo

$$\|\gamma\|_\infty := \sup_{t \in [0,1]} |\gamma(t)|.$$

Ejercicio

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos cerrados en Ω. Pruébese que son equivalentes:

1. γ_0, γ_1 son homotópicos como caminos cerrados en Ω.
2. Existe $\gamma : [0,1] \to (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ continua tal que $\gamma(0) = \gamma_0$ y $\gamma(1) = \gamma_1$.

Resolución. ② $\Rightarrow$ ① Si γ es como en ② el alumno puede comprobar inmediatamente que $h(s,t) := \gamma(s)(t)$ $0 \le s \le 1$ $0 \le t \le 1$, establece una homotopia entre γ_0 y γ_1.

① $\Rightarrow$ ② si $h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una homotopia de caminos cerrados con $h(0,t) = \gamma_0(t)$ y $h(1,t) = \gamma_1(t)$, entonces $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Lambda(\Omega)$ definida por $s \mapsto \gamma(s)$

donde $\gamma(s)(t) := h(s,t)$, es una aplicación continua para $|\cdot| - \|\cdot\|_\infty$. Esta última afirmación se sigue, como el alumno puede comprobar, de la continuidad UNIFORME de h en $[0,1]\times[0,1]$. #

Lema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y fijemos $a \notin \Omega$. La aplicación $\mathrm{Ind}(.,a) : (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{Z}$, que a cada $\gamma \in \Lambda(\Omega)$ le hace corresponder su índice alrededor de a es localmente constante.

Demostración.- Necesitamos utilizar el resultado que establece que si γ y σ son dos caminos cerrados que no pasan por cero y

[*] $\left\{ |\gamma(t)-\sigma(t)| < |\gamma(t)|+|\sigma(t)| \ \forall t\in[0,1] \text{ entonces } \mathrm{Ind}(\gamma,0) = \mathrm{Ind}(\sigma,0). \right\}$

Fijamos $\gamma \in \Lambda(\Omega)$: como $a \notin \gamma([0,1])$ tenemos que

$$0 < \varepsilon = \min\{|\gamma(t)-a| : t\in[0,1]\}$$

Si tomamos $B_{\|\cdot\|_\infty}(\gamma, \varepsilon/2) = \{\sigma \in \Lambda(\Omega) : \|\gamma-\sigma\| < \varepsilon/2\}$ entonces

$\sigma \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\gamma, \varepsilon/2) \rightsquigarrow$

$$|\gamma(t)-\sigma(t)| \underset{t\in[0,1]}{\leq} \|\gamma-\sigma\| < \varepsilon/2 < |\gamma(t)-a| \rightsquigarrow$$

$$|(\gamma(t)-a)-(\sigma(t)-a)| < |\gamma(t)-a| \quad \forall t\in[0,1] \overset{[*]}{\rightsquigarrow}$$

$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \mathrm{Im}(\sigma, a)$ y así $\mathrm{Ind}(\cdot, a)$ es localmente constante como queremos demostrar.

Proposición

Si $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ son dos caminos cerrados Ω-homotópicos, entonces son Ω-homólogos.

Demostración.- Sea $a \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. Si γ_0, γ_1 son Ω-homotópicos, entonces existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ continua tal que $\gamma(0)=\gamma_0$, $\gamma(1)=\gamma_1$.

Si consideramos

$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \longrightarrow & A(\Omega) & \xrightarrow{\text{Ind}(\cdot,a)} & \mathbb{Z} \\ s & \rightsquigarrow & \gamma(s) & \rightsquigarrow & \text{Ind}(\gamma(s),a) \end{array}$$

esta aplicación es localmente constante y por lo tanto continua $\rightsquigarrow$ como $[0,1]$ es conexo, la función es $\underline{\text{cte}}$ y así

$\text{Ind}(\gamma_0, a) = \text{Ind}(\gamma_1, a)$ para cada $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. #

Definición

Un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es simplemente conexo si cada camino cerrado en Ω es Ω-homotópico a un camino constante.

Con esta noción de abierto simplemente conexo es claro que si Ω es simplemente conexo $\rightsquigarrow$ que cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero: esta es la implicación (2) $\Longrightarrow$ (3) en el teorema con $\underline{\underline{9}}$ equivalencias.

Después del trabajo que hemos hecho se tiene como consecuencia:

Teorema de Cauchy

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado en Ω, regular a trozos y Ω-homotópico a un camino constante. Se verifica

$$\int_\gamma f(z)dz = 0; \quad \text{Ind}(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \text{ si } a \notin \text{Imagen}(\gamma)$$

Si γ_0, γ_1 son caminos regulares a trozos en Ω, con los mismos extremos, y Ω-homotópicos como caminos con extremos fijos, se cumple

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Vamos a demostrar ahora la caracterización dada en la página 23 con nueve condiciones equivalentes para los abiertos simplemente conexos:

FINAL

DEMOSTRACIÓN.–

❶ Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.

❷ Ω es simplemente conexo.

Si $\varphi : \Omega \longmapsto D(0,1)$ es un homeomorfismo y $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ cerrado en Ω, entonces $\varphi \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow D(0,1)$, es un camino cerrado en Ω que es homotópico a una cte: si $h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow D(0,1)$ es la homotopía entre $\varphi \circ \gamma$ y una cte, entonces $\varphi^{-1} \circ h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ es una homotopía entre γ y un camino cte en Ω.

❷ Ω es simplemente conexo.

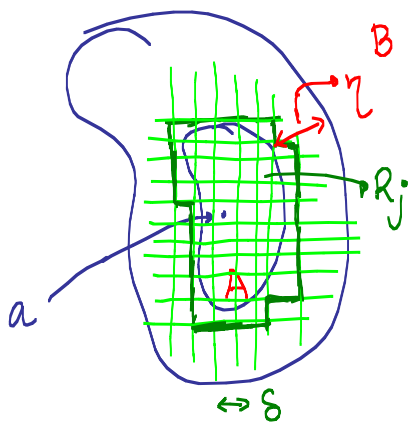
❸ Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y γ es un camino cerrado en Ω, entonces γ es homotópico a un camino cte $= \gamma_0$ en Ω $\overset{\text{por una proposición anterior}}{\leadsto}$ $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = 0$.

❸ Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.

❹ $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.

Vamos a demostrar que si ④ no se satisface entonces ③ tampoco. Supongamos que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ no es conexo. Tomemos A, B cerrados en $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ (cerrados en $\mathbb{C}_\infty$) no triviales, tales que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega = A \cup B$. Si $\infty \in B \leadsto A \subset \mathbb{C}$. Así A es cerrado en $\mathbb{C}$; por otro lado es fácil ver que A es acotado (B contiene un entorno de infinito relativo a $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ y A está en el complementario).



Si llamamos $B_0 = B - \{\infty\}$, entonces $B_0 \subset \mathbb{C}$ es cerrado y así podemos tomar
$$0 < \eta < d(A, B_0)$$

Tomemos ahora $0 < \delta < \eta/\sqrt{2}$ y fijado $a \in A$, tomamos una malla como la del dibujo de paso δ de forma que $a \in$ interior de uno de los cuadrados que se obtienen. Consideremos Γ el ciclo formado por las fronteras ∂R_j de todos los rectangulos $R_j \cap A \neq \emptyset$. Se tiene que

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = 1$$

Si llamamos Γ' al ciclo que se obtiene cancelando los caminos opuestos de Γ obtenemos $\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = 1$ y ademas por las precauciones tomadas $\mathrm{Imagen}(\Gamma') \subset \Omega$, como el alumno puede comprobar: Γ' es el ciclo de este COLOR VERDE en el dibujo de la página anterior.

3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.

Sea γ un camino cerrado en Ω y sea T la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$: $T \cup \{\infty\}$ es la componente conexa de ∞ en $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathrm{Imag}(\gamma)$. Como $\mathrm{Imagen}(\gamma) \subset \Omega \rightsquigarrow \infty \in \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \mathrm{Imag}(\gamma)$.
Como $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo $\rightsquigarrow \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset T \cup \{\infty\} \rightsquigarrow \mathbb{C} \setminus \Omega \subset T$.
Ahora bien, para cada $z \in T$ sabemos $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$, en particular para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se tiene $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$ y así γ es Ω-homólogo.

3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
5. $f(z)\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.

Esta es la fórmula de Cauchy: cada ciclo Γ en Ω es Ω-homólogo, y para el tenemos la fórmula de Cauchy para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

5. $f(z)\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.
6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)\,dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.

6 establece la validez del Teorema de Cauchy para cada ciclo Γ y cada función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Cuando se demuestra la fórmula de Cauchy se establece la equivalencia entre 5 y 6

6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)\,dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.
7. Ω es holomórficamente conexo.

Si γ es un camino cerrado en Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0 \rightsquigarrow$ la forma diferencial $\omega(z) = f(z)dz$ es EXACTA en $\Omega \rightsquigarrow \exists F : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-diferenciable tal que $dF(z) = f(z)dz \longrightarrow F$ es holomorfa y $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

7. Ω es holomórficamente conexo.
8. Ω es logarítmicamente conexo.

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $0 \notin f(\Omega)$ entonces $\phi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ $z \in \Omega$, $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por lo tanto existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $F'(z) = \phi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para cada $z \in \Omega$. De aquí se tiene que:

$$\left(\frac{f(z)}{e^{F(z)}}\right)' = \frac{f'(z)e^{F(z)} - f(z)\cdot \frac{f'(z)}{f(z)} e^{F(z)}}{(e^{F(z)})^2} = 0 \quad \forall z \in \Omega \rightsquigarrow$$

$$\frac{f(z)}{e^{F(z)}} = \text{cte} \neq 0 \quad \forall z \in \Omega \rightsquigarrow \frac{f(z)}{e^{F(z)}} = e^{\mu} \text{ algún } \mu \in \mathbb{C} \rightsquigarrow f(z) = e^{\mu + F(z)} \quad \forall z \in \Omega.$$

8. Ω es logarítmicamente conexo.
9. Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

Si existe $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{\phi(z)} = f \rightsquigarrow$
$g(z) := e^{1/2\,\phi(z)}$, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $(g(z))^2 = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

9. Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.

Si $\Omega = \mathbb{C}$, ya sabemos que Ω es homeomorfo a $D(0,1)$ mediante la aplicación $z \rightsquigarrow \frac{z}{1+|z|}$.

Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, el teorema de Riemann asegura que Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$ #

Integrales dependientes de un parámetro

Proposición

Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino regular a trozos, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $T := \gamma([0,1])$. Sea $F : T \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función que cumple:

1. Para cada $w \in T$ la función $z \rightsquigarrow F(w,z)$ es holomorfa en Ω;
2. Para cada $z \in \Omega$ las funciones $w \mapsto F(w,z)$ y $w \mapsto \frac{d}{dz}F(w,z)$ son continuas;
3. Para cada compacto $K \subset \Omega$

$$\sup\{|F(w,z)| : w \in T, z \in K\} = M_K < +\infty.$$

Entonces la función

$$f(z) := \int_\gamma F(w,z)\,dw$$

es holomorfa en Ω y

$$f'(z) := \int_\gamma \frac{d}{dz} F(w,z)\,dw \quad \text{para cada } z \in \Omega.$$

Demostración.– Es suficiente hacer la prueba cuando γ es de clase C^1.

Tomamos $\pi_n = \left(0 = 0 < 1/n < 2/n \cdots < n/n = 1\right)$ y $\xi_k^n = \frac{k}{n}$ $k = 1, 2, \dots, n$.

Entonces podemos escribir,

$$f(z) = \int_\gamma F(w, z)\, dw = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(\gamma(\xi_k^n), z) \cdot \gamma'(\xi_k^n).$$

Si llamamos, $f_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(\gamma(\xi_k^n), z)\, \gamma'(\xi_k^n)$, observamos que:

✓ $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$.

✓ $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es NORMAL: si $K \subset \Omega$ compacto $\rightsquigarrow$

$$|f_n(z)| \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |F(\gamma(\xi_k^n), z)|\, |\gamma'(\xi_k^n)| \le M_K \cdot \|\gamma'\|_\infty$$
$z \in K$

Así, como $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ para cada $z \in \Omega$ $\overset{\text{VITALI}}{\rightsquigarrow}$ $f_n \xrightarrow{\tau_K} f$ y $\overset{\text{Weierstrass}}{\rightsquigarrow}$ $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f_n' \longrightarrow f'$, lo que significa:

$$f'(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dz} F(\gamma(\xi_k^n), z) \cdot \gamma'(\xi_k^n) = \int_\gamma \left(\frac{d}{dz} F(w, z)\right) dw. \quad \#$$

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $F : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función que cumple:

1. F es continua;
2. Para cada $t \in [0, +\infty)$ la función $z \rightsquigarrow F(t, z)$ es holomorfa y se supone que existe $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que
   (a) $|F(t, z)| \le \varphi(t)$ para cada $t \in [0, +\infty)$ y $z \in \Omega$;
   (b) $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt < +\infty$

Entonces la función $f(z) := \int_0^{+\infty} F(t, z) dt$ es holomorfa en Ω y

$$f'(z) := \int_0^{+\infty} \frac{d}{dz} F(t, z) dt \quad \text{para cada } z \in \Omega.$$

Demostración.- Sea $u \in \mathbb{R}$ $u > 0$, definimos

$$f_u(z) := \int_0^u F(t, z)\, dt.$$

Probaremos que la familia $\{f_u : u > 0\}$ es NORMAL. De aquí, se sigue el resultado, como veremos mas tarde. Sabemos que:

i) $z \longrightarrow F(t,z)$ es holomorfa.

ii) $|F(t,z)| \leq \varphi(t) \Rightarrow \sup\{|F(t,z)| : t \in [0,u], z \in \Omega\} = M_u < +\infty$

iii) $t \longrightarrow F(t,z)$ continua.

[*] Vamos a ver que: $z \longrightarrow \frac{d}{dz} F(t,z)$ es tambien continua.

Efectivamente: para $t \in [0,u]$ llamamos $F_t(z) := F(t,z)$. Consideremos la composición:

$$[0,u] \xrightarrow{H} \mathcal{H}(\Omega) \xrightarrow{D} \mathcal{H}(\Omega)$$
$$t \rightsquigarrow F_t \rightsquigarrow F_t'$$

Como D es continua, si vemos que H es continua ya tendremos [*].

Si $t_n \longrightarrow t$ en $[0,u]$ $\rightsquigarrow$
$|F(t_n, z)| \leq M_u \rightsquigarrow (F_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ es NORMAL y

$\lim_n F_{t_n}(z) = F_t(z) \underset{\text{VITALI}}{\rightsquigarrow} F_{t_n} \xrightarrow{Z_K} F_t$. De aqui claramente se sigue [*].

Utilizando ahora la proposición anterior se tiene $f_u \in \mathcal{H}(\Omega)$ para cada $u>0$. Por otra parte se tiene que:

$$|f_u(z)| \leq \int_0^u |F(t,z)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt < +\infty \quad \forall z \in \Omega \rightsquigarrow$$

$\{f_u : u>0\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es NORMAL. En particular tomando límites se tiene que:

$$f(z) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n F(t,z)\,dt = \lim_n f_n(z)$$

existe para cada $z \in \Omega$. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es NORMAL $\underset{}{\overset{\text{VITALI}}{\rightsquigarrow}}$ $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y ahora

$$f'(z) \overset{\text{Weierstrass}}{=} \lim_n f_n'(z) \underset{\uparrow}{=} \lim_n \int_0^n \left(\frac{d}{dz} F(t,z)\right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{dz} F(t,z)\right) dz.$$

util. la proposición anterior.

Así queda terminada la prueba #

Observación

En la proposición anterior se pueden sustituir (a) y (b) por la condición de que para cada compacto $K \subset \Omega$ exista $\varphi_K : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que $|F(t,z)| \le \varphi_K(t)$ para cada $t \in [0, +\infty)$ y $z \in K$ y $\int_0^{+\infty} \varphi_K(t)dt < +\infty$

↳ Basta observar que lo importante en la demostración que hemos terminado lo importante es tener acotaciones sobre compactos $K \subset \Omega$, para garantizar la NORMALIDAD de las familias involucradas.

Proposición

La expresión $f(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ define una función holomorfa en el abierto $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. f coincide con la función Γ en $\{x \in \mathbb{R} : x \ge 1\}$ y por tanto $f = \Gamma$ en Ω.

Demostración.- Probaremos que:

$$z \longrightarrow \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \text{ es holomorfa en } \Omega.$$

$$z \longrightarrow \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \text{ es holomorfa en } \mathbb{C}.$$

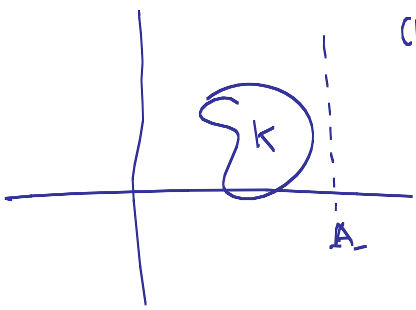
A) ESTUDIO DE $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

Consideremos la función $F(t,z) = e^{-t} \cdot t^{z-1} = e^{-t} \cdot e^{(z-1)\ln t}$ definida en $[1, +\infty) \times \mathbb{C}$. Tenemos que:

1. F es continua en $[1, +\infty) \times \mathbb{C}$.
2. Para cada $t \in [1, +\infty)$ fijo: $z \longrightarrow e^{-t} \cdot t^{z-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y para cada $K \subset \mathbb{C}$ fijo compacto, existe $\varphi_K : [1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ continua con

(a) $|F(t,z)| \le \varphi_K(t)$ $\quad t \in [1, +\infty)$ $\quad z \in K$

(b) $\int_1^{+\infty} \varphi_K(t) < +\infty$



Efectivamente: sea $A \ge \operatorname{Re} z$ $\quad \forall z \in K$. Entonces:

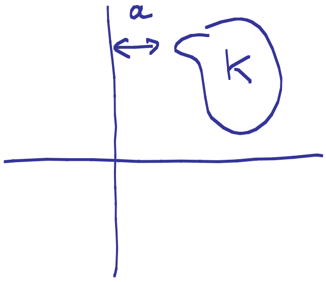
$$|F(t,z)| = |e^{-t} \cdot e^{(z-1)\ln t}| = e^{-t} \cdot e^{(x-1)\ln t} =$$

$z = x + iy \in K$

$$= \frac{t^{x-1}}{e^t} = \frac{t^{x+1}}{e^t}\cdot\frac{1}{t^2} \leq \frac{t^{A+1}}{e^t}\cdot\frac{1}{t^2} \underset{[*]}{\leq} m_K\cdot\frac{1}{t^2}$$

Para razonar [*] observar que $t \longrightarrow \dfrac{t^{A+1}}{e^t}$ es continua en $[1,+\infty)$ y $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{A+1}/e^t = 0$.

B) ESTUDIO de [**] $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt$ si $\operatorname{Re} z > 0$.



Si $z = x+iy \in K$, entonces:

$$|e^{-t}t^{z-1}| = \frac{t^{x-1}}{e^t} \leq t^{x-1} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{t^x}{x}\Big|_0^1 = 1/x.$$ Así, [**] es una integral absolutamente convergente. Consideramos, ahora:

$$J_n(z) = \int_{1/n}^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

La función $F(t,z) = e^{-t}t^{z-1}$ en $[1/n,1]\times\Omega$ es continua; fijado t es holomorfa en la variable z. Fijamos $K \subset \Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ compacto y $0 < a < \inf\{\operatorname{Re} z : z\in K\}$ tenemos que:

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}\,t^{\operatorname{Re} z-1} = \frac{t^{\operatorname{Re} z-1}}{e^t} \leq t^{\operatorname{Re} z-1} \leq t^{a-1}$$

Para cada $z\in K$, se tiene:

$$|J_n(z)| = \left|\int_{1/n}^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt\right| \underset{z\in K}{\leq} \int_{1/n}^1 t^{a-1}\,dt = \frac{t^a}{a}\Big|_{1/n}^1 = (1/a) - \frac{(1/n)^a}{a} \leq 1/a$$

Así $\{J_n : n\in\mathbb{N}\}$ es NORMAL y en consecuencia $J\in\mathcal{H}(\Omega)$

$\#$